Geometrie auf der Zirkularkurve

Eckart Schmidt

Durch eine Punktrechnung für Kurven dritten Grades lassen sich geometrische Eigenschaften von Punktkonstellationen auf der Zirkularkurve sehr einfach begründen. Ausgehend von vier korrespondierenden Punkten, deren Diagonal- und Steiner-Dreieck wird eine Vielzahl von geometrischen Zusammenhängen aufgezeigt. Hintergrund dieser Ausarbeitung ist eine Veröffentlichung von F.Lang [1].

1. Die Zirkularkurve

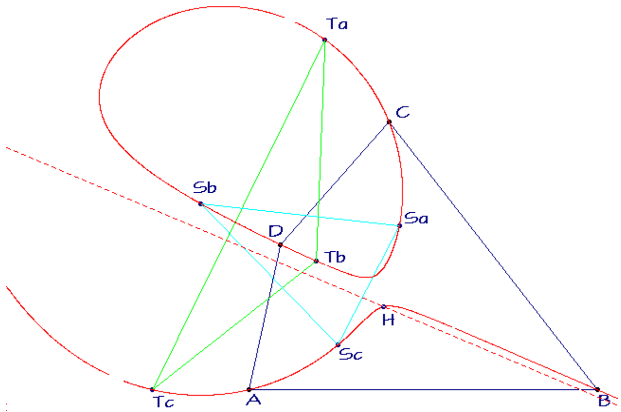
Zu vier Punkten *A, B, C, D* sei $T_aT_bT_c$ das Diagonaldreieck

mit $T_a = AD \cap BC, \quad T_b = BD \cap AC, \quad T_c = CD \cap AB$

und $S_aS_bS_c$ das Steiner-Dreieck

mit $S_a = St_{CABD}, \quad S_b = St_{ABCD}, \quad S_c = St_{ACBD}$.

Dabei bezeichnet z.B. St_{ABCD} den Steiner-Punkt des Vierseits aus den Seitengeraden des Vierecks *ABCD.*
Ergänzend wird eine Zirkularkurve zu den vier Punkten betrachtet. Diese Kurve dritter Ordnung ist isogonal (*) invariant bzgl. des Steiner-Dreiecks mit dem Pivot-Punkt im Fernpunkt der Geraden *AA**, *BB**, *CC**, *DD**. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Zirkularkurve mit ihrer Asymptoten als Hauptpunkt *H*, so ist der Pivot-Punkt *H**.



2. Punktrechnung auf der Zirkularkurve

Für reelle Punkte der Zirkularkurve, auf die wir uns im Folgenden beschränken, lässt sich eine Punktrechnung mit Gruppeneigenschaften erklären [1]:

(1) $\quad X + Y =_{def} res(X,Y)^* \quad \Leftrightarrow \quad res(X,Y) = (X+Y)^*$.

Dabei bezeichne $res(X,Y)$ den dritten Schnittpunkt der Geraden *XY* mit der Zirkularkurve, auch als Residuum von *X* und *Y* angesprochen. Der „Nullpunkt“ O sei in den Pivot-Punkt H^* gelegt. Dann ist das additiv Inverse eines Punktes X

(2) $$-X = res(X, H).$$

Einige Zusammenhänge seien als „Handwerkszeug“ vorausgeschickt, eine Begründung findet sich in [1]:

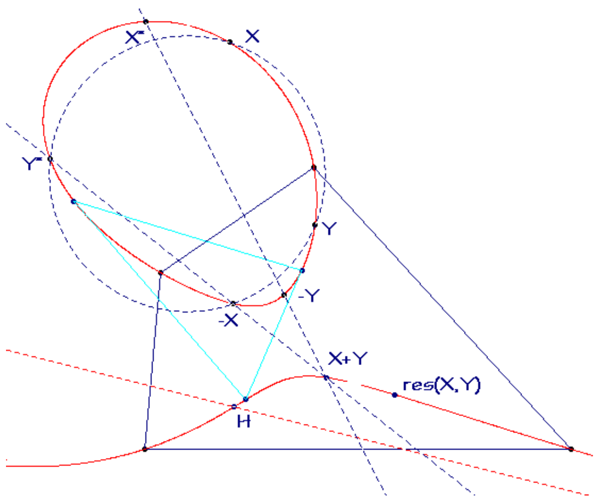
(3) X, Y, Z *kollinear* $\Leftrightarrow$ $X + Y + Z = H$

(4) X, X^* *isogonal konjugiert* $\Leftrightarrow$ $X + X^* = H$

(5) T_X *Tangentialpunkt von* X $\Leftrightarrow$ $T_X = H - 2X$

(6) X, Y *korrespondierend* $\Leftrightarrow$ $T_X = T_Y$ $\Leftrightarrow$ $2X = 2Y$

(7) *Sechs Punkte liegen genau dann auf einem Kegelschnitt, wenn ihre Summe 2H ergibt.*



Damit lassen sich geometrische Eigenschaften für Punkte auf der Zirkularkurve additiv untersuchen. So liefert z.B. die Gleichung

$$H =_{(4)} X^* - Y + (X + Y)$$

die geometrische Aussage, dass X^*, $-Y$ und $X+Y$ sowie entsprechend Y^*, $-X$ und $X+Y$ kollinear sind.

Oder: Geraden durch $P+Q$ schneiden die Zirkularkurve in Punkten X und Y, die mit P und Q konzyklisch liegen:

$$(P + Q) + X + Y =_{(3)} H \quad \Leftrightarrow \quad P + Q + X + Y + K_1 + K_2 = 2H.$$

Dabei bezeichnen K_1 und K_2 die unendlich fernen Kreispunkte mit

(8) $K_1 + K_2 + H^* =_{(3)} H \quad \Leftrightarrow \quad K_1 + K_2 = H.$

So liegen z.B. die Punkte X, Y, $-X$, Y^* konzyklisch.

3. Korrespondierende Punkte

Betrachtet man vier korrespondierenden Punkte A, B, C, D mit dem Tangentialpunkt T, so gilt

(9) $2A = 2B = 2C = 2D =_{(5)} H - T =_{(4)} T^*.$

Aus der Gleichung $2P=2Q$ kann nur auf die Korrespondenz, nicht aber auf die Gleichheit geschlossen werden.

Die Subtraktion korrespondierender Punkte ist kommutativ:

(10) $A - D = D - A, \quad B - D = D - B, \quad C - D = D - C$.

Die Summe zweier korrespondierender Punkte ist gleich der Summe der verbleibenden zwei korrespondierenden Punkte, da sich die Verbindungsgeraden in einem der Diagonalpunkte schneiden:

(11) $A+D=B+C, \quad B+D=A+C, \quad C+D=A+B$.

Die alternierende Summe dreier korrespondierender Punkte ergibt den vierten, die Summe das Dreifache des vierten korrespondierenden Punktes:

(12) $A-B+C=D, \quad A+B+C=3D$.

Die Summe von vier korrespondierenden Punkten ergibt das Vierfache eines der Punkte:

(13) $A+B+C+D=_{(11)} 2A+2B=_{(9)} 4D=_{(9)} 2T^*$.

Diese Aussagen für A, B, C, D gelten für beliebige Quadrupel korrespondierender Punkte.

4. Diagonal- und Steiner-Dreieck

Mit der Kollinearitätsbedingung ergeben sich die Diagonalpunkte zu

(14) $T_a=_{(3)} H-A-D, \quad T_b=_{(3)} H-B-D, \quad T_c=_{(3)} H-C-D$;

sie korrespondieren mit dem Tangentialpunkt $T=H-2D$:

$$2T_a=_{(14)} 2(H-A-D)=_{(9)} 2H-4D=2T .$$

Die Steiner-Punkte sind Schnittpunkte von Umkreisen zu Teildreiseiten. So liegt der Steiner-Punkt S_b z.B. auf dem Umkreis des Dreiecks ABT_a:

$$A+B+T_a+S_b+K_1+K_2=_{(7)} 2H$$

$$\Leftrightarrow \quad S_b=_{(8)} H-A-B-T_a=_{(14)} -B+D=_{(10)} B-D .$$

Die Steiner-Punkte haben also eine Darstellung

(15) $S_a=A-D=D-A, S_b=B-D=D-B, S_c=C-D=D-C$

und korrespondieren offensichtlich mit dem Pivot-Punkt $H^*=O$, dem neutralen Element der Addition. Offensichtlich ist der Tangentialpunkt der Steiner-Punkte der Hauptpunkt. Aus den oben hergeleiteten Eigenschaften korrespondierender Punkte folgt:

(16) $S_a=-S_a, S_b=-S_b, S_c=-S_c \textit{ mit } 2S_a=2S_b=2S_c=H^*=O$

$$S_a=S_b+S_c, \quad S_b=S_a+S_c, \quad S_c=S_a+S_b$$

$$\textit{und } S_a+S_b+S_c=H^*=O .$$

Zu einem Punkt P ergeben sich die korrespondierenden Punkte als Residuen von P^* und den Steiner-Punkten:

$$2res(P^*,S_i)=_{(1)} 2(P^*+S_i)^*=_{(4)} 2H-2P^*-2S_i=_{(4)(16)} 2P$$

und haben damit eine Darstellung:

(17) $P_a=P\pm S_a, \quad P_b=P\pm S_b, \quad P_c=P\pm S_c$.

Beispiel: Zur Inkreismitte J des Steiner-Dreiecks erhält man die korrespondierenden Ankreismitten zu

$$J_a=J\pm S_a, \quad J_b=J\pm S_b, \quad J_c=J\pm S_c \quad .$$

Das Steiner-Dreieck ist das Diagonaldreieck von $J_aJ_bJ_cJ$, d.h.

(18) $S_a =_{(14)} H - J_a - J \Leftrightarrow S_a =_{(17)} H - 2J \mp S_a \Leftrightarrow 2J = H$.

Diagonal-Dreieck und Steiner-Dreieck liegen bekanntlich perspektiv. Das Perspektivzentrum ist ein zentraler Punkt des Vierecks:

(19) $Z = res(T_i, S_i) =_{(1)} (T_i + S_i)^* =_{(14)(16)} (H - 2D)^* =_{(4)} 2D =_{(9)} T^*$.

Der Z-Punkt eines Vierecks ist also das isogonale Bild des Tangentialpunktes. Die korrespondierenden Punkte von Z ergeben sich zu

(20) $Z \pm S_i =_{(16)(19)} A + D =_{(14)} T_i^*$.

D.h. der Z-Punkt eines Vierecks korrespondiert mit den isogonalen Bildern der Ecken seines Diagonaldreiecks.

5. Konjugationen

Wählt man das Diagonaldreieck als Bezugsdreieck, so ist die Zirkularkurve invariant bzgl. einer Konjugation mit den Fixpunkten *A*, *B*, *C*, *D* und dem Pivot-Punkt im Tangentialpunkt *T* dieser vier Punkte. Bezeichnet man das Bild von *X* bei dieser Konjugation mit *X*^, so folgt aus der Kollinearität von *X* und *X*^ mit dem Pivot-Punkt *T*

(21) $X\,\hat{} =_{(3)} H - T - X =_{(4)} T^* - X =_{(19)} Z - X$.

Diese Konjugation bildet z.B. die Steiner-Punkte auf die isogonalen Bilder der Diagonalenschnitte ab:

$$S_i\,\hat{} =_{(21)} Z - S_i =_{(20)} T_i^* .$$

Die Zusammenhänge lassen sich verallgemeinern. Die Tabelle zeigt unterschiedliche Sichtweisen einer Zirkularkurve.

Bezugsdreieck aus korr. Punkten	invariant gegenüber Konjugation	Pivot-Punkt
S_a, S_b, S_c	$X \to H - X$ (*)	$H^*=O$
T_a, T_b, T_c	$X \to Z - X$ (^)	$Z^*=T$
$P\pm S_a$, $P\pm S_b$, $P\pm S_c$	$X \to P^* - X$	P

Wählt man auf der Zirkularkurve ein Bezugsdreieck aus korrespondierenden Punkten eines Pivot-Punktes *P*, so ist die Zirkularkurve invariant gegenüber der Konjugation, die den Punkt *P* mit seinem Tangentialpunkt T_P vertauscht.

Jede Residuen-Abbildung zu einem Punkt *Q* kann als Konjugation auf der Zirkularkurve betrachtet werden:

$$\kappa_Q : \quad X \to res(X, Q) =_{(1)(4)} Q^* - X ,$$

$$\text{z.B. } \kappa_H : \quad X \to -X .$$

Für zwei korrespondierende Punkte *X* und *Y* korrespondieren auch die Bilder $\kappa_P X$ und $\kappa_P Y$ bei einer Konjugation, d.h. *A**, *B**, *C**, *D** und *A*^, *B*^, *C*^, *D*^ sind korrespondierende Quadrupel.

Für zwei korrespondierende Punkte P und Q korrespondieren auch die Bilder $\kappa_P X$ und $\kappa_Q X$ eines Punktes bei den zugehörigen Konjugationen, z.B. ist $(\kappa_A X, \kappa_B X, \kappa_C X, \kappa_D X)$ für jeden Punkt der Zirkularkurve ein korrespondierendes Quadrupel.

Das Hintereinanderausführen dreier Konjugationen ergibt wieder eine Konjugation:

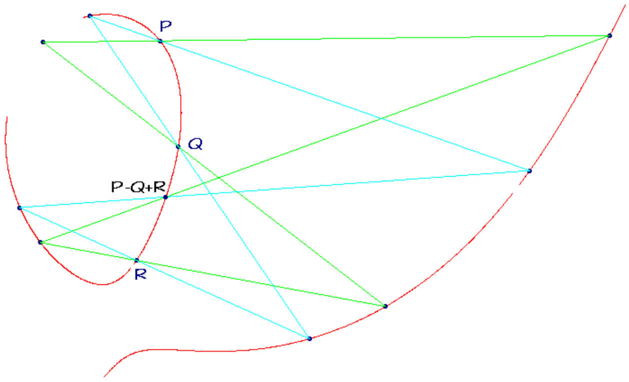
$$\kappa_R \kappa_Q \kappa_P = \kappa_{P-Q+R} .$$

Dabei gilt $R^* - Q^* + P^* =_{(4)} H - (R - Q + P) =_{(4)} (R - Q + P)^*$.

Zu kollinearen Punkten ist $P - Q + R = T_Q$, zu korrespondierenden Punkten ist $P - Q + R$ der vierte korrespondierende Punkt.

Damit ergibt das Hintereinanderausführen der Konjugationen zu vier korrespondierenden Punkten die Identität:

$$\kappa_A \kappa_B \kappa_C \kappa_D = id .$$

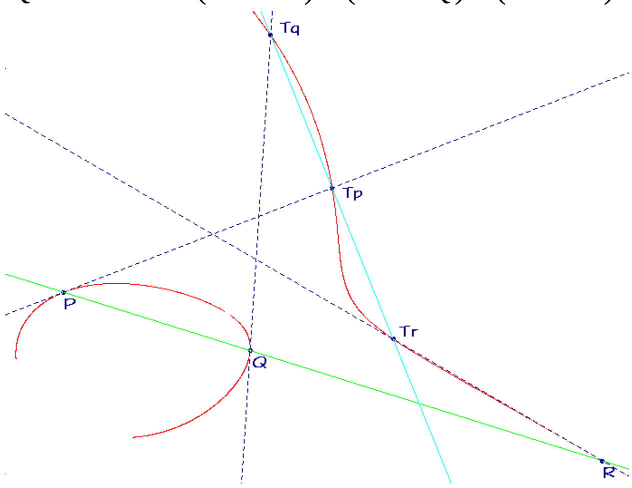


6. Kollineare Punkte

Eine Gerade durch die Punkte P und Q schneidet die Zirkularkurve in $(P+Q)^* = H - P - Q$. Für P=Q ergibt sich der Tangentialpunkt $T_P = H - 2P$.

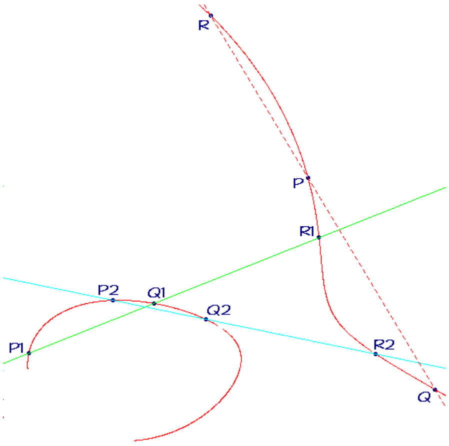
(a) Zu drei kollinearen Punkten liegen auch die Tangentialpunkte kollinear:

$$P + Q + R = H \Leftrightarrow (H - 2P) + (H - 2Q) + (H - 2R) = H$$

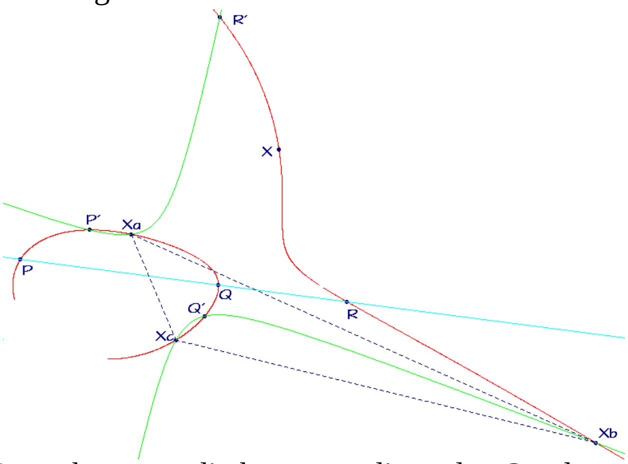


(b) Zu kollinearen Punkten P_1, Q_1, R_1 und P_2, Q_2, R_2 liegen auch die Residuen kollinear:

$$P_1 + Q_1 + R_1 = H \quad \wedge \quad P_2 + Q_2 + R_2 = H$$
$$\Rightarrow \quad res(P_1, P_2) + res(Q_1, Q_2) + res(R_1, R_2)$$
$$= (H - P_1 - P_2) + (H - Q_1 - Q_2) + (H - R_1 - R_2) = H \; .$$



(c) Zu einem Punkt X liegen die korrespondierenden Punkte X_a, X_b, X_c und die Residuen bzgl. dreier kollinearer Punkte P, Q, R auf einem Kegelschnitt.

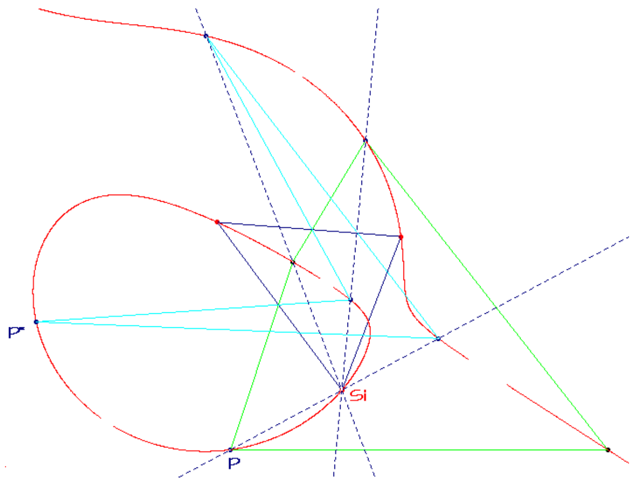


(d) Betrachtet man die korrespondierenden Quadrupel zu drei kollinearen Punkten P, Q, R, so sind jeweils zwei Quadrupel perspektiv zu jedem Punkt des dritten Quadrupels:

Z.B. $(P \pm S_i) + (Q \pm S_i) + R = P + Q + R = H$,

oder $(P \pm S_i) + (Q \pm S_j) + (R \pm S_k) = P + Q + R = H$.

So liegen die korrespondierenden Tripel zu zwei isogonalen Punkten perspektiv zu den Steiner-Punkten.



7. Konzyklische Punkte

Ein Kreis durch die Punkte *P*, *Q*, *R* schneidet die Zirkularkurve in *(P+Q+R)** :

$$P+Q+R+(P+Q+R)^{*}+K_1+K_2 =_{(7)} 2H\,.$$

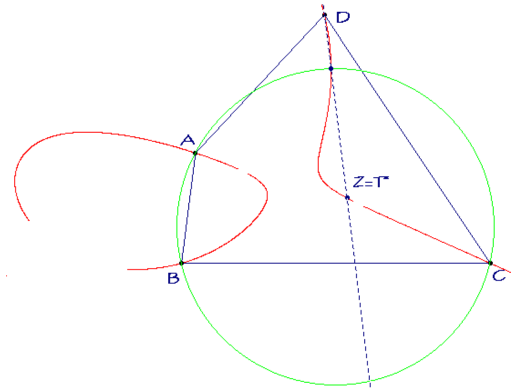
Damit liegen vier Punkte der Zirkularkurve auf einem Kreis, wenn ihre Summe H ergibt:

$$P,Q,R,S \quad \textit{konzyklisch} \quad \Leftrightarrow \quad P+Q+R+S=H\,.$$

Einfachstes Beispiel ist der Umkreis des Steiner-Dreiecks, auf dem der Hauptpunkt liegt.

(a) Ein Kreis durch drei korrespondierende Punkte schneidet die Zirkularkurve in einem weiteren Punkt, der mit dem vierten korrespondierenden Punkt und dem Z-Punkt des Quadrupels kollinear ist:

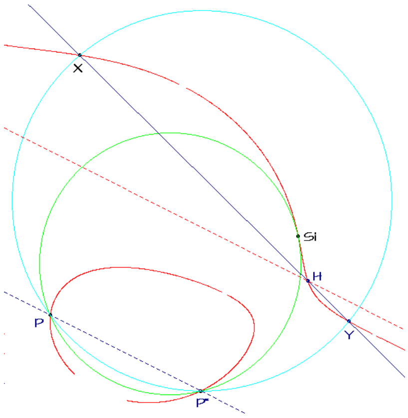
$$A+B+C+X=H \Leftrightarrow_{(12)} 3D+X=H \Leftrightarrow_{(19)} D+Z+X=H\,.$$



(b) Sind zwei von vier Kreispunkten isogonal, so liegen die beiden anderen auf einer Geraden durch den Hauptpunkt:

$$P+P^{*}+X+Y=H \Leftrightarrow H+X+Y=H\,.$$

Damit sind Kreise durch zwei isogonale Punkte und einen Steiner-Punkt Berührkreise.

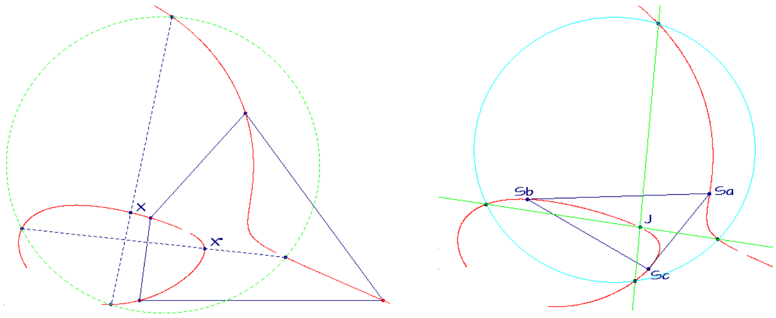


(c) Zwei Geraden durch isogonale Punkte schneiden die Zirkularkurve konzyklisch. Oder: Zu vier Kreispunkten sind die Residuen von jeweils zwei Punkten isogonal:

$$P+Q+R+S=H$$

$$\Leftrightarrow res(P,Q)=(P+Q)^*=H-P-Q=R+S=res(R,S)^*$$

Für die selbst-isogonalen In- und Ankreismitten des Steiner-Dreiecks folgt dann: Zeichnet man durch einen dieser Punkte zwei Geraden, so schneiden diese die Zirkularkurve konzyklisch. Diesbezüglich ließe sich ein „Sehnen- bzw. Sekantensatz“ formulieren.

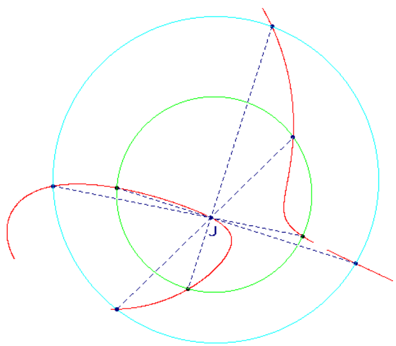


(d) Zu einer In- oder Ankreismitte liegen die Residuen für vier konzyklische Punkte wieder konzyklisch:

$$P+Q+R+S=H$$

$$\Rightarrow (H-J-P)+(H-J-Q)+(H-J-R)+(H-J-S)$$

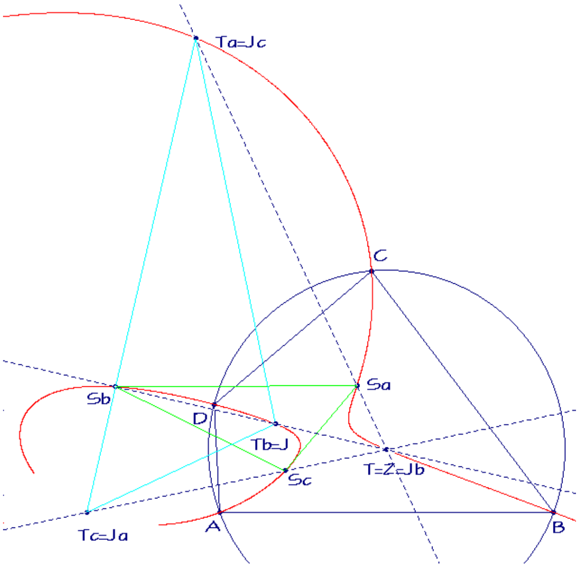
$$=3H-4J=3H-2H=H$$



(e) Für ein Kreisviereck fällt bekanntlich der Tangentialpunkt in den Mittelpunkt. Für vier korrespondierende Kreispunkte *A*, *B*, *C*, *D* liegt daher der Mittelpunkt ebenfalls auf der Zirkularkurve. Dabei gilt:

$$2J=H=A+B+C+D=4D=2Z\,.$$

Damit muss Z eine selbst-isogonale In- oder Ankreismitte des Steiner-Dreiecks sein, d.h. $Z=Z^*=T$. Der Mittelpunkt von vier konzyklischen korrespondierenden Punkten fällt also in eine In- oder Ankreismitte des Steiner-Dreiecks.



8. Berührkreise

Vom den vier möglichen Schnittpunkten eines Kreises k mit der Zirkularkurve z können ...

(a) ... zwei Punkte zusammenfallen: k und z haben eine gemeinsame Tangente: $2P+Q+R=H$.

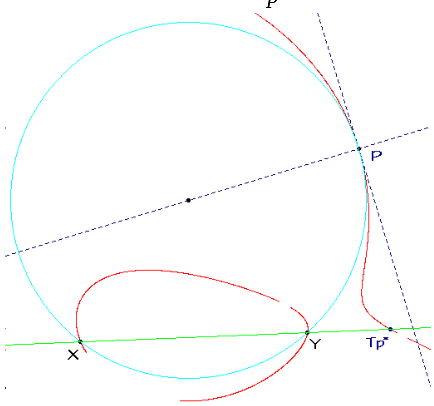
(b) ... zwei mal zwei Punkte zusammenfallen: k berührt z in zwei Punkten: $2P+2Q=H$.

(c) ... drei Punkte zusammenfallen: k ist Krümmungskreis von z: $3P+Q=H$.

(d) ... alle vier Punkte zusammenfallen: $4P=H$.

(a) Schneidet ein Berührkreis die Zirkularkurve in zwei weiteren Punkten, so liegen diese mit dem isogonalen Bild des Tangentialpunkts von P kollinear:

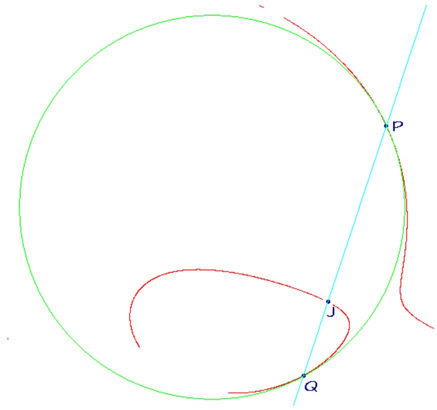
$$2P+X+Y=H \quad \Leftrightarrow \quad X+Y=T_P \quad \Leftrightarrow \quad X+Y+T_P{*}=H\ .$$



Für Berührkreise in den Ecken des Vierecks $ABCD$ sind die Schnittsekanten Geraden durch $Z=T^*$.

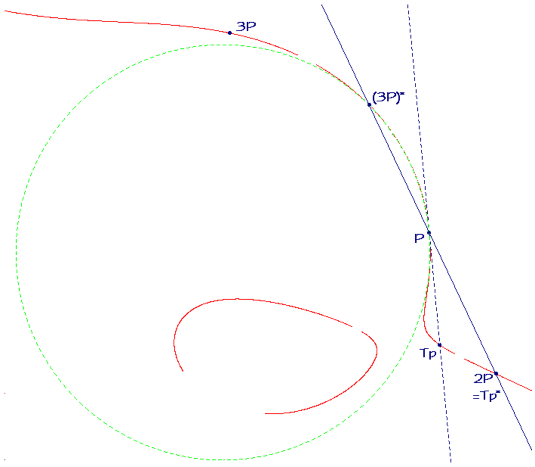
(b) Berührt ein Kreis die Zirkularkurve in zwei Punkten, so liegen diese Berührpunkte mit einer In- oder Ankreismitte kollinear:

$$2P+2Q=H \Leftrightarrow 2(P+Q)=H \Leftrightarrow P+Q=J \quad (J_a, J_b, J_c)$$
$$\Leftrightarrow res(P,Q)=J^*=J \quad (J_a, J_b, J_c)\,.$$



(c) Der Krümmungskreis zum Punkt P schneidet die Zirkularkurve in einem Punkt, der mit P und T_P* kollinear liegt:

$$3P+X=H \Leftrightarrow X=(3P)^*=res(P,2P)=res(P,T_P{}^*)$$



(d) Die Bedingung *4P=H* besagt, dass P auf dem Umkreis seiner korrespondierenden Punkte liegt (siehe 7e). Der zugehörige Krümmungskreis hat mit der Zirkularkurve keinen weiteren Punkt gemein.

9. Kegelschnitte

Bildet man die Ferngerade isogonal ab, so erhält man den Umkreis des Steiner-Dreiecks, auf dem der Hauptpunkt liegt. Bildet man eine beliebige Gerade *PQ* isogonal ab, so erhält man einen Umkegelschnitt des Steiner-Dreiecks durch *P**, *Q** und *res(P,Q)**. Ist diese Gerade die Asymptote, so berührt der Umkegelschnitt die Zirkularkurve im Hauptpunkt.

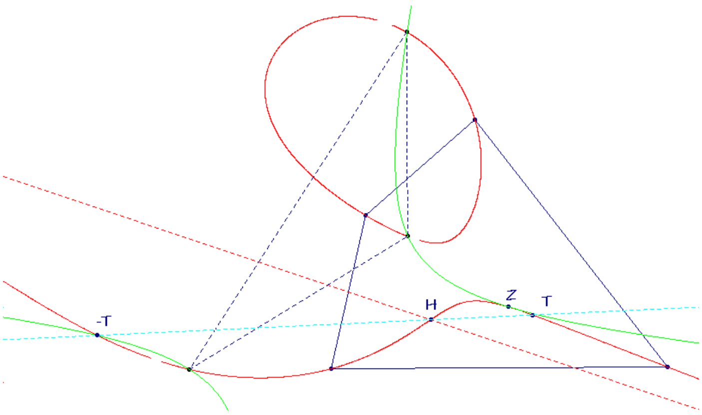
(a) Bildet man Geraden ^konjugiert, d.h.

$$X \quad \rightarrow \quad X^\wedge = Z - X \qquad \text{(siehe 5),}$$

bzgl. des Diagonaldreiecks von *A, B, C, D* ab, erhält man Umkegelschnitte des Diagonaldreiecks: Z.B. ist das ^Bild der Ferngeraden der Mittenkegelschnitt, dessen Zentrum *Z* auf der Zirkularkurve liegt.

Das ^-Bild der Asymptoten ergibt einen Umkegelschnitt des Diagonaldreiecks, der die Zirkularkurve in $Z=T^*$ berührt mit einem Schnittpunkt in

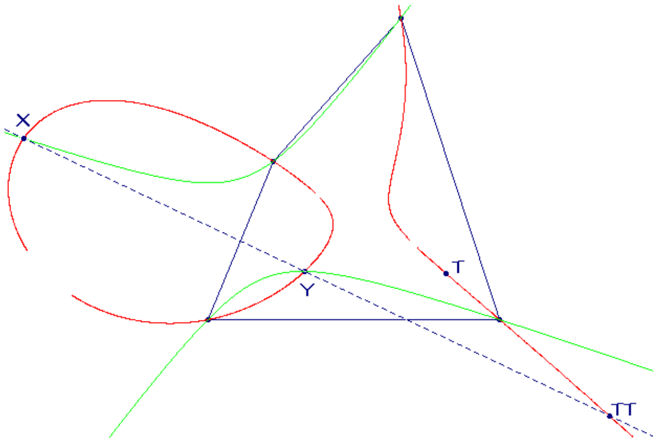
$$H\,\hat{}= Z - H = -Z^* = -T = res(H,T)$$



(b) Hat ein Kegelschnitt durch vier korrespondierende Punkte zwei weitere Schnittpunkte mit der Zirkularkurve, so liegen diese auf einer Geraden durch den zweiten Tangentialpunkt T_T:

$$A+B+C+D+X+Y=2H$$

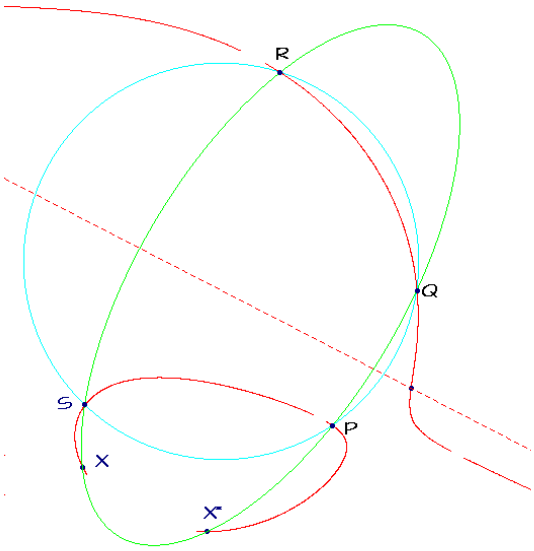
$$\Leftrightarrow X+Y=2(H-Z)=2Z^*=2T \Leftrightarrow X+Y+T_T=H$$



Ein Umkegelschnitt des Vierecks durch den Tangentialpunkt ist also ein Berührkegelschnitt.

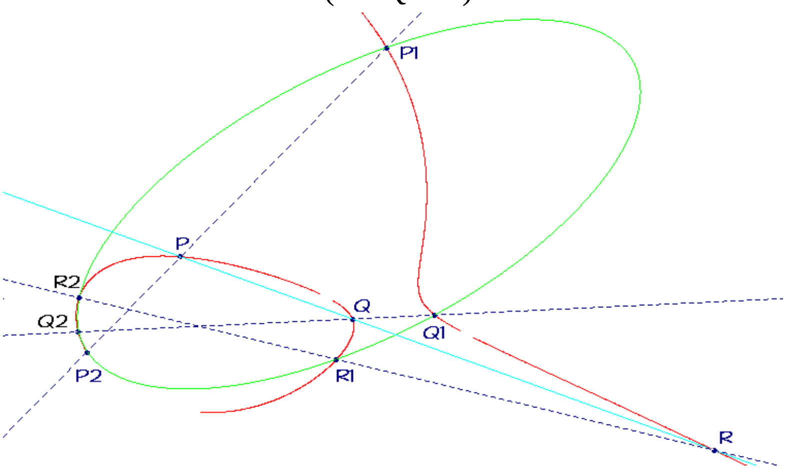
(c) Kegelschnitte durch isogonale Punkte schneiden die Zirkularkurve konzyklisch:

$$X+X^*+P+Q+R+S=2H \Leftrightarrow P+Q+R+S=H\,.$$



(d) Betrachtet man zu drei kollinearen Punkten *P*, *Q*, *R* beliebige Residuenpaare (P_1,P_2), (Q_1,Q_2), (R_1,R_2) , so liegen die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt:

$$P_1+P_2+Q_1+Q_2+R_1+R_2=H-P+H-Q+H-R$$
$$=3H-(P+Q+R)=2H\ .$$

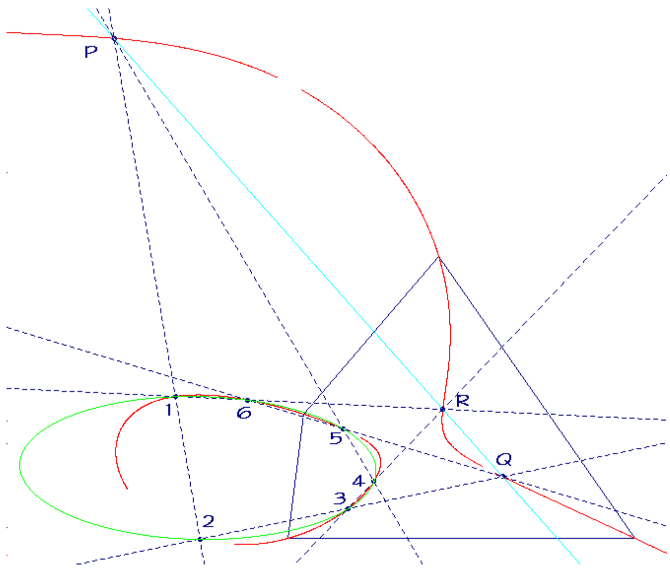


Entsprechend gilt die Umkehrung: Liegen sechs Punkte der Zirkularkurve auf einem Kegelschnitt, so sind die Residuen dreier disjunkter Punktepaare kollinear.

(e) Ein Spezialfall von (d) ergibt eine „Pascal-Konstellation“: Wählt man zu drei kollinearen Punkten *P*, *Q*, *R* einen beliebigen Anfangspunkt X_1 und definiert

$$X_2=res(P,X_1)=H-P-X_1,\qquad X_3=res(Q,X_2)=P-Q+X_1,$$
$$X_4=res(R,X_3)=2Q-X_1,\qquad X_5=res(P,X_4)=R-Q+X_1,$$
$$X_6=res(Q,X_5)=H-R-X_1,$$

so „schließt“ sich die Figur mit $X_1=res(R,X_6)$ und die sechs Punkte X_1 bis X_6 liegen auf einem Kegelschnitt. Weiterhin sind die Residuen der Gegenecken die kollinearen Tangentialpunkte von *P*, *Q*, *R*.



(f) Vierseite, deren Schnittpunkte auf der Zirkularkurve liegen, seien als Z-Vierseite angesprochen. Die Seiten eines Vierecks *ABCD* aus korrespondierenden Punkten legen z.B. ein Z-Vierseit fest. Aber auch zwei nicht-korrespondierende Punkte P und Q können durch einen Punkt R zu einem Teildreiseit eines Z-Vierseits ergänzt werden, wenn

$$res(P,Q), res(Q,R), res(R,P) \quad kollinear$$

$$\Leftrightarrow \quad (H-P-Q)+(H-Q-R)+(H-R-P)=H$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(H-P-Q)=2R\,,$$

d.h. wenn *R* mit dem Residuum von *P*, *Q* korrespondiert. Für Dreiecke *PQR* mit dieser Eigenschaft - jede Ecke korrespondiert mit dem Residuum der beiden anderen - gibt es einen Umkegelschnitt, der die Zirkularkurve in diesen Ecken berührt, denn die obige Bedingung ist äquivalent mit

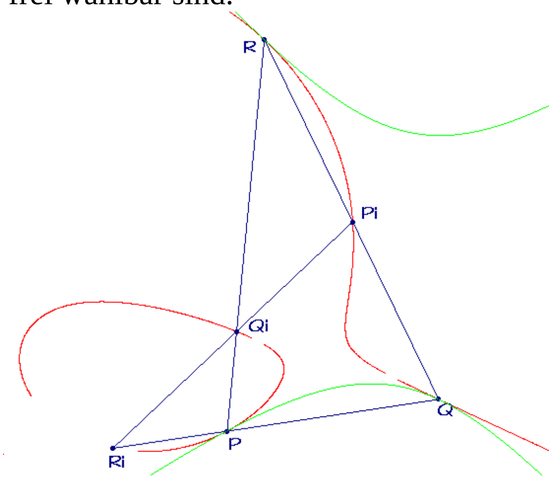
$$2P+2Q+2R=2H.$$

Ist z.B. $res(P,Q)=R_a=R\pm S_a$, so gilt $P+Q+(R\pm S_a)=H$,

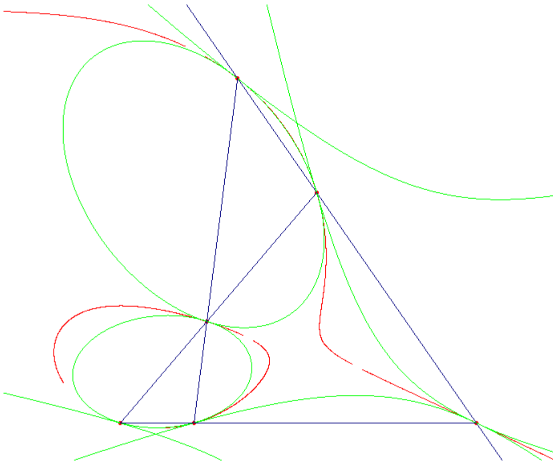
d.h. $res(Q,R)=H-Q-R=P\pm S_a=P_a$

und $res(P,R)=H-P-R=Q\pm S_a=Q_a$.

Z-Vierseite werden also durch Vierecke PQP_iQ_i festgelegt, wobei *P*, *Q* frei wählbar sind.



Damit gibt es für ein Z-Vierseit zu jedem Teidreiseit einen Kegelschnitt, der die Zirkularkurve in den Ecken berührt.

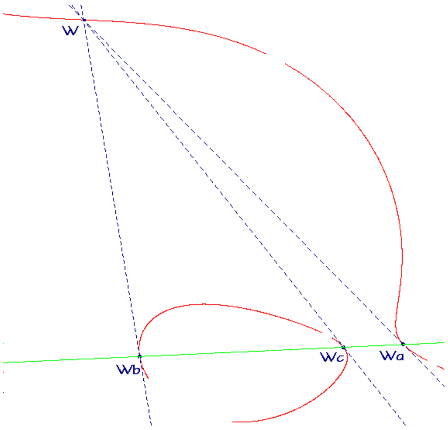


10. Wendepunkte

(a) Wendepunkte einer Zirkularkurve sind Punkte *W*, die mit ihrem Tangentialpunkt übereinstimmen:

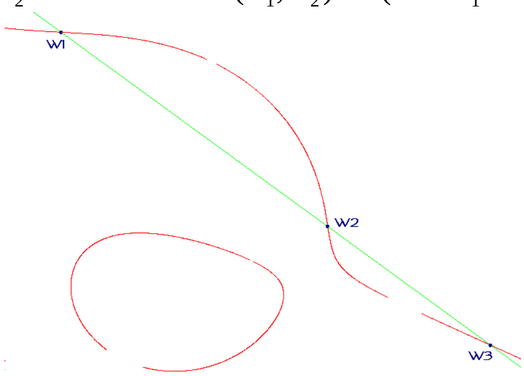
$$W = T_W = H - 2W \quad \Leftrightarrow \quad 3W = H \,.$$

Die korrespondierenden Punkte eines Wendepunktes sind somit kollinear: $W_a + W_b + W_c = 3W = H$.



(b) Die Wendepunkte einer Zirkularkurve liegen kollinear, denn mit zwei Wendepunkten *W1* und *W2* ist auch das Residuum Wendepunkt:

$$3W_1 = 3W_2 = H \quad \Rightarrow \quad 3res(W_1, W_2) = 3(H - W_1 - W_2) = H \,.$$

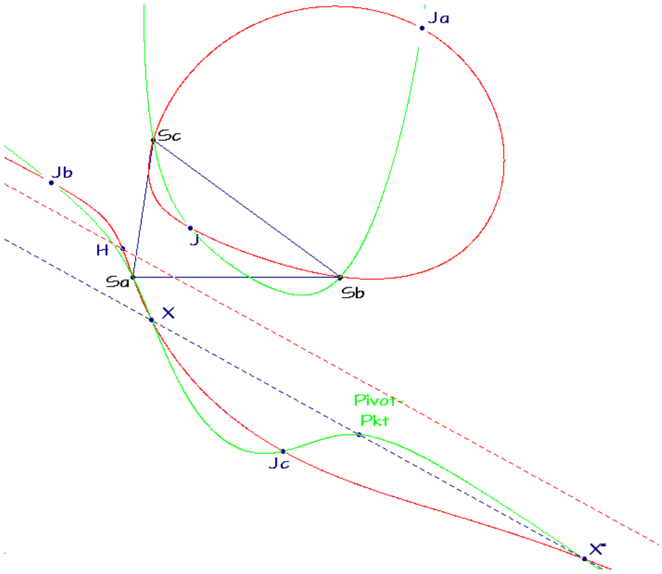


11. Schnittkurven dritter Ordnung

Drei z-Punkte liegen auf einer Geraden, wenn ihre Summe H ergibt; sechs z-Punkte liegen auf einem Kegelschnitt, wenn ihre Summe 2H ergibt; neun z-Punkte liegen auf einer – von z verschiedenen - Kurve dritter Ordnung, wenn ihre Summe 3H ergibt [1]. Diese Verallgemeinerung eröffnet weitere Untersuchungen.

(a) Alle bzgl. des Steiner-Dreiecks isogonal invarianten Kurven dritter Ordnung schneiden die Zirkularkurve des Vierecks in zwei isogonal konjugierten Punkten *X* und *X**, deren Residuum der Pivot-Punkt ist.

$$S_a + S_b + S_c + J + J_a + J_b + J_c + X + Y = 3H$$
$$\Leftrightarrow \quad X + Y = 3H - 4J = 3H - 2H = H\,.$$



Entsprechendes gilt auch für die ^Konjugation und weitere Konjugationen.

(c) Abschließend eine Anmerkung zur Neuberg-Kurve eines Dreiecks, die isogonal invariant ist mit dem Pivot-Punkt im Fernpunkt der Euler-Geraden. Isogonal invariante Kurven dritter Ordnung zum gleichen Bezugsdreieck schneiden die Neuberg-Kurve neben den In- und Ankreismitten in zwei weiteren isogonal konjugierten Punkten, deren Verbindungsgerade parallel zur Euler-Geraden verläuft und auch den Pivot-Punkt der Schnittkurve enthält. Für die bekanntesten isogonal invarianten Kurven dritter Ordnung von Thomson, McCay, Darboux, Feuerbach oder die Orthocubic liegen die Pivot-Punkte auf der Euler-Geraden, so dass sie die Neuberg-Kurve in den isogonal konjugierten Punkten der Euler-Geraden schneiden, also im Höhenschnitt und der Umkreismitte.

Literatur

[1] Fred Lang: Geometry and Group Structures of some Cubics. – Forum Geometricorum, Vol. 2 (2002) 135-146.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de